第27卷 第1期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 1
2010年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0030-07

不确定混沌系统自适应改进投影同步与参数估计*

李战国，　徐　伟

(西北工业大学理学院应用数学系，西安　710072)

摘　要: 研究一类新混沌系统与Genesio-Tesi混沌系统的改进投影同步，并对新混沌系统未知参数进行估计。依据主动控制原理，设计了非线性控制器和参数自适应更新律，用Lyapunov稳定性理论证明了误差系统原点的渐进稳定性。数值仿真结果验证了设计的非线性控制器和参数自适应更新律的有效性及其在有界噪声干扰下的鲁棒性。

关键词: 新混沌系统；Genesio-Tesi混沌系统；改进投影同步；自适应律；有界噪声

分类号: AMS(2000) 37N35　　**中图分类号**: O415.5　　**文献标识码**: A

1　引言

混沌是非线性系统的特有现象，表现为系统长期演化结果敏感依赖于系统初始条件。基于混沌同步在保密通信等领域的广泛潜在应用价值，以及人们对其奇异特性的探索兴趣，自上世纪九十年代Pecora等[1]的开创性工作以来，众多学者对混沌同步展开了广泛的研究，提出了混沌同步控制的多种方法和类型[2]。常见的混沌同步主要有完全同步[1]、相同步[3]、延迟同步[4]、反同步[5]、广义同步[6]、投影同步[7-9]等。同一系统的混沌同步较易实现，而不同系统的混沌同步则较难。关于随机力对混沌同步的影响，部分学者大多使用高斯白噪声进行过研究，然而实际系统所承受的环境噪声大多是有界的[10]。本文将基于主动控制原理，设计非线性控制器和参数更新律，研究一类新混沌系统[11-12]和Genesio-Tesi混沌系统[7]的改进投影同步，估计新混沌系统的未知参数，并研究有界噪声对混沌同步和参数估计结果所产生的影响。

2　模型及理论分析

本文研究的新混沌系统模型方程为[12]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2x_3 + ax_1, \\ \dot{x}_2 = x_1x_3 + bx_2, \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{3}x_1x_2 + cx_3. \end{cases} \tag{1}$$

这里$X=(x_1,x_2,x_3)$表示系统的状态，a, b, c是系统参数。在$a=5$, $b=-10$, $c=-3.8$时系统(1)有图1所示混沌吸引子。

收稿日期: 2008-05-20.　**作者简介**: 李战国(1972年11月生)，男，博士，讲师. 研究方向：非线性与随机动力学.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10872165; 10472091; 10702065).

Genesio-Tesi 混沌系统方程可写为[7]

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 = y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 = -a_1y_1 - b_1y_2 - c_1y_3 + y_1^2 + u_3. \end{cases} \tag{2}$$

这里 $Y = (y_1, y_2, y_3)$ 和 $U = (u_1, u_2, u_3)$ 分别表示系统状态和对系统施加的外部驱动力，a_1, b_1, c_1 是系统参数，满足条件 $b_1c_1 < a_1$。在 $a_1 = 6$，$b_1 = 2.9$，$c_1 = 1.2$ 和 $U = 0$ (即对 Genesio-Tesi 系统不施加控制) 时，系统 (2) 有图 2 所示混沌吸引子。

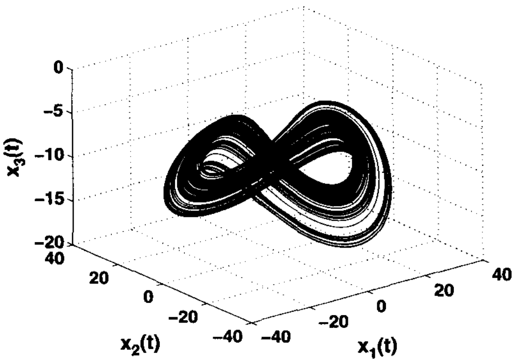

图 1:　$a = 5$, $b = -10$, $c = -3.8$ 时，系统 (1) 的奇怪吸引子

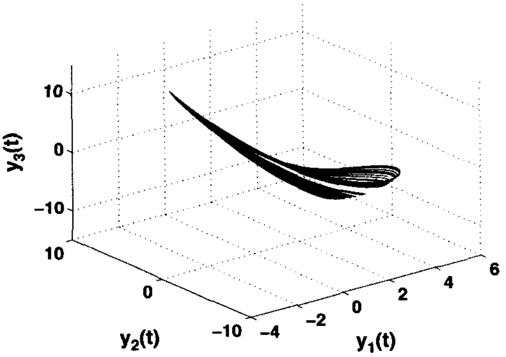

图 2:　$a_1 = 6$, $b_1 = 2.9$, $c_1 = 1.2$ 时，系统 (2) 的奇怪吸引子

设系统 (1) 为驱动系统，其三个参数 a, b, c 未知，系统 (2) 为响应系统。下面研究系统 (1) 与系统 (2) 的改进投影同步和对系统 (1) 三个未知参数 a, b, c 的自适应估计问题。

定义 1　设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三个不同的尺度因子，当下面三个等式同时成立时，称系统 (1) 与系统 (2) 实现改进投影同步[7-8]。

$$\lim_{t\to\infty} \| x_1(t) - \alpha_1y_1(t) \| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \| x_2(t) - \alpha_2y_2(t) \| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \| x_3(t) - \alpha_3y_3(t) \| = 0. \tag{3}$$

注 1　当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ 时，称系统 (1) 与系统 (2) 实现完全同步。

注 2　当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$ 时，称系统 (1) 与系统 (2) 实现反同步。

由定义 1 知，在改进投影同步意义下，系统 (1) 与系统 (2) 的误差动力系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = -x_2x_3 + ax_1 - \alpha_1y_2 - \alpha_1u_1, \\ \dot{e}_2(t) = x_1x_3 + bx_2 - \alpha_2y_3 - \alpha_2u_2, \\ \dot{e}_3(t) = \frac{1}{3}x_1x_2 + cx_3 + \alpha_3a_1y_1 + \alpha_3b_1y_2 + \alpha_3c_1y_3 - \alpha_3y_1^2 - \alpha_3u_3. \end{cases} \tag{4}$$

这里

$$e_1(t) = x_1(t) - \alpha_1y_1(t), \quad e_2(t) = x_2(t) - \alpha_2y_2(t), \quad e_3(t) = x_3(t) - \alpha_3y_3(t), \tag{5}$$

分别表示系统 (1) 与系统 (2) 各状态变量间的同步误差。从而系统 (1) 与系统 (2) 的改进投影同步问题可转化为误差系统 (4) 的原点渐进稳定性问题。这里 u_1, u_2, u_3 为待定非线性控制函数。为在实现系统 (1) 与系统 (2) 改进投影同步的同时，通过系统 (2) 的三个参数 a_1, b_1, c_1 的自适应变化分别估计出系统 (1) 的三个未知参数 a, b, c，依据主动控制原理，非线性控制器可取为

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{1}{\alpha_1}[k_1e_1 - x_2x_3 - \alpha_1y_2 + \alpha_1x_1], \\ u_2(t) = \frac{1}{\alpha_2}[k_2e_2 + x_1x_3 - \alpha_2y_3 + b_1x_2], \\ u_3(t) = \frac{1}{\alpha_3}[k_3e_3 + \frac{1}{3}x_1x_2 + \alpha_3a_1y_1 + \alpha_3b_1y_2 + \alpha_3c_1y_3 - \alpha_3y_1^2 + c_1x_3]. \end{cases} \tag{6}$$

这里 $k_i > 0,\ i = 1,2,3$。参数自适应更新律取如下形式

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = x_1e_1, \\ \dot{b}_1 = x_2e_2, \\ \dot{c}_1 = x_3e_3. \end{cases} \tag{7}$$

引理 1 (Barbalat 引理)[13-14] 设 $f(t)$ 是连续光滑的实函数，对于范数 L_2 和 L_∞，若 $f(t) \in L_2 \cap L_\infty$，并且

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}(t)} \in L_\infty,$$

则有 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$。

定理 1 对于系统 (1) 与系统 (2) 的任意初始条件和任意尺度因子 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，在非线性控制器 (6) 和参数更新律 (7) 作用下，系统 (1) 与系统 (2) 能够实现改进投影同步。

证明 取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2). \tag{8}$$

这里 $e_a = a_1 - a,\ e_b = b_1 - b,\ e_c = c_1 - c$ 分别表示用 a_1, b_1, c_1 估计未知参数 a, b, c 时的误差，从而 $\dot{e}_a = \dot{a}_1,\ \dot{e}_b = \dot{b}_1,\ \dot{e}_c = \dot{c}_1$。利用式 (6) 和式 (7) 可求得 Lyapunov 函数沿误差系统 (4) 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \dot{e}_1e_1 + \dot{e}_2e_2 + \dot{e}_3e_3 + \dot{e}_ae_a + \dot{e}_be_b + \dot{e}_ce_c \\ &= (-x_2x_3 + ax_1 - \alpha_1y_2 - \alpha_1u_1)e_1 + (x_1x_3 + bx_2 - \alpha_2y_3 - \alpha_2u_2)e_2 \\ &\quad + \Big(\frac{1}{3}x_1x_2 + cx_3 + \alpha_3a_1y_1 + \alpha_3b_1y_2 + \alpha_3c_1y_3 - \alpha_3y_1^2 - \alpha_3u_3\Big)e_3 \\ &\quad + \dot{a}_1(a_1 - a) + \dot{b}_1(b_1 - b) + \dot{c}_1(c_1 - c) \\ &= (-k_1e_1 + ax_1 - a_1x_1)e_1 + (-k_2e_2 + bx_2 - b_1x_2)e_2 + (-k_3e_3 + cx_3 - c_1x_3)e_3 \\ &\quad + x_1e_1(a_1 - a) + x_2e_2(b_1 - b) + x_3e_3(c_1 - c) \\ &= -k_1e_1^2 - k_2e_2^2 - k_3e_3^2 = -e^TKe. \end{aligned}$$

这里 $e = (e_1, e_2, e_3)^T,\ K = \mathrm{diag}(k_1, k_2, k_3)$。因 $\dot{V}$ 是半负定的，我们还不能立即得知误差系统 (4) 的原点是渐进稳定的。由 $\dot{V} \le 0$ 知 $e_1, e_2, e_3, e_a, e_b, e_c \in L_\infty$。由误差系统 (4) 知 $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$

$\in L_\infty$。因 $\dot{V} = -e^TKe \leq 0$, K 正定，从而

$$\int_0^t \lambda_{\min}(K)\|e\|^2\mathrm{d}t \leq \int_0^t e^TKe\,\mathrm{d}t \leq \int_0^t -\dot{V}\,\mathrm{d}t = V(0) - V(t) \leq V(0).$$

这里 $\lambda_{\min}(K)$ 表示矩阵 K 的最小特征根，故 $e_1, e_2, e_3 \in L_2$。由引理1知，在 $t \to \infty$ 时，有 $e_1(t), e_2(t), e_3(t) \to 0$。从而系统(1)与系统(2)实现改进投影同步。同步速度可通过 k_1, k_2, k_3 进行调节。

3　数值仿真

为验证上文设计的非线性控制器(6)和参数自适应更新律(7)的正确性，用四阶Runge-Kutta方法同时求解系统(1)与系统(2)，计算步长取0.001。系统(1)的未知参数设定为 $a = 5$, $b = -10$, $c = -3.8$，初始条件 $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = -1$。系统(2)的参数取 $a_1 = 6$, $b_1 = 2.9$, $c_1 = 1.2$，初始条件 $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -3$, $y_3(0) = 2$。尺度因子取 $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0.6$, $\alpha_3 = -3$。系统(1)与系统(2)的状态同步误差通过式(5)计算。同步速度调节系数取 $k_1 = 15$, $k_2 = 10$, $k_3 = 2$。先让系统(1)与系统(2)自由演化10秒以使其达到充分混沌状态，在 $t = 10$ 秒时打开控制器开关，两系统状态变量的同步误差变化如图3所示，对参数 a, b, c 的估计结果如图4所示。由图3知，在 $t = 14$ 秒左右时，$e_1(t)$ 与 $e_2(t)$ 就已经收敛到零，$e_3(t)$ 则收敛到零点很小的邻域内。在 $t = 24$ 秒左右时，$e_3(t)$ 也准确收敛到零，从而系统(1)与系统(2)严格实现改进投影同步。由图4知，在 $t = 16$ 秒左右时，系统(1)的三个未知参数 a, b, c 就被 $a_1(t)$, $b_1(t)$, $c_1(t)$ 通过自适应变化准确估计出来。

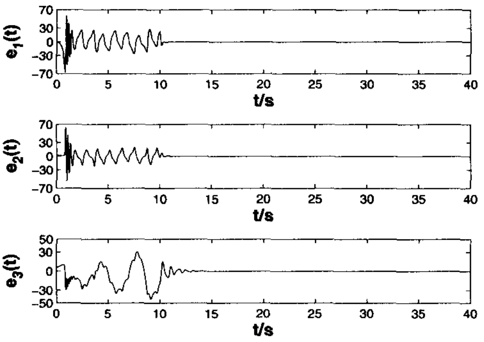

图3:　系统(1)与系统(2)的改进投影同步误差

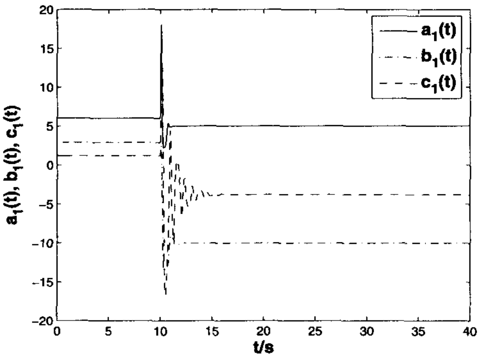

图4:　系统(1)三个未知参数的估计值

4　有界噪声影响

由于系统在实际环境中难免要受到噪声的干扰，而这些噪声往往是有界的，因而研究有界噪声对系统(1)与系统(2)改进投影同步和参数估计的影响更符合实际情况。有界噪声模型可取为 $\xi(t) = D\cos(\Omega t + \sigma w(t) + \Gamma)$，这里 D 为有界噪声强度，Ω 表示激励的中心频率，$w(t)$ 是标准Wiener过程，σ 表示频率随机扰动强度，Γ 是服从 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的随机相位[15-17]。系

统 (1) 与系统 (2) 在有界噪声 $\xi(t)$ 激励下的模型方程可分别表示为

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_2x_3 + ax_1 + \xi(t), \\ \dot{x_2} = x_1x_3 + bx_2 + \xi(t), \\ \dot{x_3} = \frac{1}{3}x_1x_2 + cx_3 + \xi(t); \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dot{y_1} = y_2 + u_1 + \xi(t), \\ \dot{y_2} = y_3 + u_2 + \xi(t), \\ \dot{y_3} = -a_1y_1 - b_1y_2 - c_1y_3 + y_1^2 + u_3 + \xi(t). \end{cases} \tag{10}$$

由于在噪声干扰下，系统 (9) 与系统 (10) 的输出可看作是随机过程，因此，在 $t \to \infty$ 时，两系统的状态变量误差 $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ 严格等于零往往很难实现。从实用角度考虑，当

$$\lim_{t\to\infty} |e_k(t)| < \gamma, \quad k = 1,2,3,$$

时即可认为系统 (9) 与系统 (10) 实现了同步 (这里 $\gamma > 0$ 是一个小量，表示同步误差精度)。下面研究有界噪声对系统 (9) 与系统 (10) 改进投影同步，以及对未知参数自适应估计值的影响。取有界噪声强度 $D = 1.2$, $\Omega = \sigma = 1$ (其它参数及初始条件同前)。先使系统 (9) 与系统 (10) 自由演化 10 秒，在 $t = 10$ 秒时打开控制器开关，两系统的状态同步误差变化如图 5 所示。对参数 a, b, c 的估计结果如图 6 所示。由图 5 知，在 $t = 14$ 秒左右时，系统 (9) 与系统 (10) 三个状态变量的状态同步误差均已收敛到零点附近很小的邻域内，同步误差曲线略显粗糙，表明系统 (10) 的状态变量可以按照给定的尺度因子，以较高的精度跟踪上系统 (9) 相应状态变量的变化。跟踪误差是一个非常小的量。由图 6 可以看出，在 $t = 15$ 秒左右时，未知参数 a, b, c 的真值即被 $a_1(t)$, $b_1(t)$, $c_1(t)$ 通过自适应变化以很高的精度估计出来，三条估计值曲线略显粗糙，估计误差是一个很小的量。为定量刻画有界噪声对系统 (9) 与系统 (10) 同步误差和参数估计相对误差的影响，记

$$\mathrm{abse}_k = \max_{t>35} |x_k(t) - \alpha_k y_k(t)|, \quad k = 1,2,3,$$

分别表示系统 (9) 与系统 (10) 各状态变量间稳态时的最大同步误差。

$$\varepsilon_1 = \max_{t>35} \left\{ \left|\frac{a_1(t) - a}{a}\right| \times 100\% \right\}, \quad \varepsilon_2 = \max_{t>35} \left\{ \left|\frac{b_1(t) - b}{b}\right| \times 100\% \right\},$$

$$\varepsilon_3 = \max_{t>35} \left\{ \left|\frac{c_1(t) - c}{c}\right| \times 100\% \right\},$$

分别表示对未知参数 a, b, c 估计值的相对误差在稳态时的最大值。对于不同的有界噪声强度 D，在 $t = 10$ 秒时打开控制器开关，系统 (9) 与 (10) 三状态变量间稳态最大同步误差值和对未知参数估计值的相对误差的最大值如表 1 所示。由表 1 可见，随着有界噪声强度 D 的增大，最大同步误差和参数估计相对误差的最大值呈逐渐增大趋势。在有界噪声强度 $D \le 6$ 时，状态变量最大跟踪误差不超过 0.9463，这相比于状态变量的变化范围是非常小的一个量；而参数估计相对误差的最大值不超过 3.7263%。注意到表 1 中所列数据是系统 (9) 与系统 (10) 在达到稳态同步时同步误差和参数估计相对误差的最坏结果，因此，若用稳态同步时 $a_1(t)$, $b_1(t)$, $c_1(t)$ 的均值或中位数值作为对未知参数 a, b, c 的估计，其相对误差将会显著低于表1中所列相应结果。由表 1 及图 5 和图 6 知，本文设计的非线性控制器和参数自适应更新律对有界噪声具有很强的抗干扰能力。

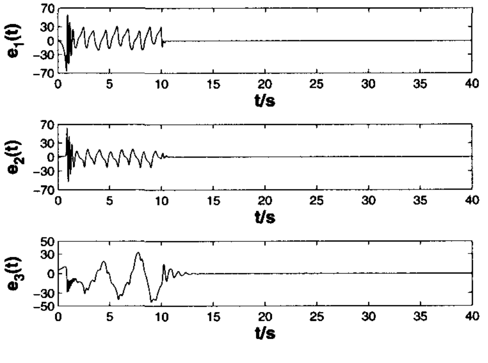

图 5:　系统 (9) 与系统 (10) 的改进投影同步误差

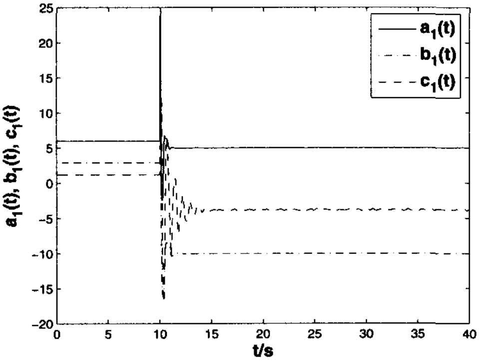

图 6:　有界噪声干扰下三个未知参数 a, b, c 的估计值

表 1:　系统 (9) 与系统 (10) 最大同步误差及对未知参数估计的最大相对误差

D	abse$_1$	abse$_2$	abse$_3$	ε_1	ε_2	ε_3
1.2	0.0516	0.0076	0.1622	0.7290%	0.0587%	0.0384%
2.0	0.0879	0.0122	0.3091	1.2526%	0.0941%	0.0333%
4.0	0.1521	0.0227	0.5163	2.3660%	0.1737%	0.0908%
6.0	0.2625	0.0370	0.9463	3.7263%	0.2755%	0.1132%
8.0	0.3476	0.0488	1.1647	4.9866%	0.3968%	0.0365%

5　结论

本文依据主动控制原理，通过设计非线性控制器和参数自适应更新律，研究了一类新混沌系统与Genesio-Tesi混沌系统的改进投影同步以及对新混沌系统未知参数估计问题。用Lyapunov稳定性理论证明了Genesio-Tesi混沌系统与新混沌系统在改进投影同步意义下误差系统原点的渐进稳定性。数值仿真表明本文设计的非线性控制器和参数自适应更新律能够快速、有效实现新混沌系统和Genesio-Tesi混沌系统改进投影同步，准确估计出新混沌系统的三个未知参数且对有界噪声干扰具有很强的鲁棒性。

参考文献：

[1] Pecora L M, Carroll T L. *Synchronization in chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8):* 821-824

[2] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, *et al.* The synchronization of chaotic systems[J]. Physics Reports, 2002, 366: 1-101

[3] Rosenblum M G, Pikovsky A S, *et al.* Phase synchronization of chaotic oscillators[J]. Physical Review Letters, 1996, 76(11): 1804-1807

[4] Yu W W, Cao J D. Adaptive synchronization and lag synchronization of uncertain dynamical system with time delay based on parameter identification[J]. Physica A, 2007, 375(2): 467-482

[5] Li G H, Zhou S P. Anti-synchronization in different chaotic systems[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2007, 32(2): 516-520

[6] Enjieu K H G, Yamapi R. General synchronization dynamics of coupled Van der Pol-Duffing oscillators[J]. Physica A, 2006, 370(2): 316-328
[7] Park J H. Adaptive controller design for modified projective synchronization of Genesio-Tesi chaotic system with uncertain parameters[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2007, 34: 1154-1159
[8] Li G H. Modified projective synchronization of chaotic system[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2007, 32(5): 1786-1790
[9] Park J H. Adaptive control for modified projective synchronization of a four-dimensional chaotic system with uncertain parameters[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 213: 288-293
[10] 徐伟，都琳，许勇. 非线性随机动力系统研究的若干进展[J]. 工程数学学报，2006, 23(6): 951-960
Xu W, Du L, Xu Y. Some recent developments of nonlinear stochastic dynamics[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(6): 951-960
[11] Chen H K, Lee C I. Anti-control of chaos in rigid body motion[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2004, 21: 957-965
[12] 李瑞红，徐伟，李爽. 一类新混沌系统的线性状态反馈控制[J]. 物理学报，2006, 55(2): 598-604
Li R H, Xu W, Li S. Linear state feedback control for a new chaotic system[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(2): 598-604
[13] 王兴元，武相军. 不确定 Chen 系统的参数辨识与自适应同步[J]. 物理学报，2006, 55(2): 605-609
Wang X Y, Wu X J. Parameter identification and adaptive synchronization of uncertain Chen system[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(2): 605-609
[14] Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992
[15] 雷佑铭，徐伟. 有界噪声和谐和激励联合作用下一类非线性系统的混沌研究[J]. 物理学报，2007, 56(9): 5103-5110
Lei Y M, Xu W. Homoclinic chaos in averaged oscillator subjected to combined deterministic and narrow-band random excitations[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(9): 5103-5110
[16] Lin Y K, Cai G Q. Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications[M]. New York: Mc Graw Hill, 1995
[17] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制[M]. 北京：科学出版社，2003
Zhu W Q. Nonlinear Stochastic Dynamics and Control[M]. Beijing: Science Press, 2003

Adaptive Modified Projective Synchronization and Parameter Estimation for Chaotic Systems with Uncertain Parameters

LI Zhan-guo, XU Wei

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: A modified projective synchronization between a new chaotic system and a Genesio-Tesi chaotic system is investigated, and the unknown parameters of the new chaotic system are also estimated. The nonlinear controller and the parameter adaptive updating law are successfully designed according to the active control principle. Moreover, a strict proof of the asymptotic stability of the origin for the error system is derived by the Lyapunov stability theory. The effectiveness and the robustness under a bounded noises disturbance of the proposed nonlinear controller and the parameters adaptive updating law are validated through numerical simulations.

Keywords: new chaotic system; Genesio-Tesi chaotic system; modified projective synchronization; adaptive law; bounded noise

Received: 20 May 2008. **Accepted:** 30 Oct 2008.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10872165; 10472091; 10702065).